特集

(続)分数階微分と粘弾性モデル

上　智　大　学
佐藤　美洋

1.　はじめに

前回はGrünwald–Letnikovの分数階微分へのアプローチをI. Podlubnyの著書“FRACTIONAL DEFFERENTIAL EQUATIONS”に従って紹介した．加えて，他のよく用いられる幾つかの分数階微分の紹介も行ない，粘弾性体への応用の展開について述べる予定であったが，Grünwald–Letnikov分数階微分の公式の誘導のプロセスに重点を置いたので，Grünwald–Letnikovの分数階微分の性質や他のよく知られた分数階微分－Riemann-LiouvilleやCaputoの分数階微分－について触れることができなかった．

今回はGrünwald–Letnikovの分数階微分の要約から始めて，分数階微分に関する前回の不足分を補うと共に，Riemann-LiouvilleやCaputoの分数階微分について，今回も主にI. Podlubnyの著書に従って解説を行う．そして最後に粘弾性体の構成方程式に分数階微分が導入される過程や，各種のモデルについて解説を加える．

2.　Grünwald–Letnikovの分数階微分と演算子の合成

前報(制振工学研究会会報49号)でI. Podlubnyの著書に忠実に解説したGrünwald–Letnikovの分数階積分と微分について，ここでは簡単にまとめ，演算子の合成について解説する．

2.1　Grünwald–Letnikovの分数階微分の要約

本節では前報で使われた式については前報の式番号を用いる．

整数p階の微分と積分を統一したGrünwald–Letnikov分数階微積分のオリジナルの形は

$$ {}_aD_t^p f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p}{r}f(t-rh), \tag{24}$$

で，mを正の整数として，$p=-m$ならm回折り返し積分，$p=m$ならm階の微分となる．そしてpを整数から実数へ拡張する．

実数$p>0$のときp回折り返し積分(分数階積分)は式(24)のpを$-p$で置き換えて評価すると，

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau)d\tau \tag{32}$$

となるが，もし関数$f(t)$が$m+1$個の連続な導関数($f^{(k)}(t),\ k=1,2,\cdots,m+1$)を持つならば

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau)d\tau \tag{34}$$

とすることができる．

実数$p>0$階の導関数(分数階微分)は，$p>0$で式(24)を評価すると

$$ {}_aD_t^{p} f(t) = \sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)d\tau \tag{45}$$

となる．ただし，公式(45)は導関数　$f^{(k)}(t),(k=1,2,\cdots,m+1)$が閉区間$[a,t]$で連続で，$m$は$m>p-1$を満足する整数である．$m$の取り得る最小の値は次の不等式で決定される．

$m<p<m+1$