特集

分数階微分と動的粘弾性モデル

上智大学理工学部
機能創造理工学科
佐藤　美洋

1.　はじめに

一般に大学の教養課程の数学であれ，専門課程の科目であれ，分数階微分積分学という講義を耳にしたことがない．また，分数階微積分学に関する英語の本は多数出版されているが，日本語の本や教科書は目にしたことがない．

筆者は数学者でもなければ，まして分数階微分の専門家でもないので，分数階微分への様々な登山ルートについて述べることは差し控え，従来の微分と積分の定義から出発して数階微分へ持ち込んだGrünwald−Letnikovの分数階微分の流れを I. Podlubny の著書“FRSCTIONAL DEFFERENTIAL EQUATIONS”に従って紹介するとともに，他のよく用いられる幾つかの分数階微分の紹介も行ない，粘弾性体への応用の展開について述べる．

整数 n が与えられると，x に関する $f(x)$の n 階微分 $D^n f(x)$ には既に定義が与えられている．この微分階数 n を分数に拡張したらどうなるのかという問題を提起したのは L'Hopital であった．1695 年に L'Hopital ロピタルは Leibniz ライプニッツに，「もし n が分数であったなら，$D^n f(x)$ はどんな意味があるだろうか」と尋ねたことに起源があると言われている．

数が自然数から整数へ，整数から分数(有理数)へ，有理数から無理数を含む実数へ，そして複素数へと拡張されてきたことを思い起こせば，微分階数もそのような展開を辿ったのであろうと推察するのは容易である．実際の発展の歴史がそれほど単純ではなかったとしても．

n を自然数から整数へ拡張することは n 階微分と n 回折り返し積分とを統一することであり，その後，微分階数を実数そして複素数へと発展させられる．現在，分数階微分と呼ばれるものは，実は任意階微分積分学というべきものであるが，L'Hopital の問題提起に始まったことから，分数階微分の名が残っていると言われている．

2.　分数階微分

2.1 整数階微分と積分の統合

n 回折り返し積分(n-fold integral)と n 階微分の無限の列

$$\cdots,\ \int_a^t d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau_1)d\tau_1,\ \int_a^t f(\tau_1)d\tau_1,\ f(t),\ \frac{df(t)}{dt},\ \frac{d^2f(t)}{dt^2},\ \cdots$$

を考える．上の関数列の $f(t)$ から左のほうへ向かって折り返し積分の回数が上がっていく．重積分が領域 D で定義された多変数関数の積分であるのに対して，“n 回折り返し積分”は一般に閉区間$[a,t]$で定義された 1 変数関数の n 重折り返し積分である．

分数階微積分学は任意階の微積分の理論に対する名称で，任意階の微分と任意重積分を統一し一般化したものである．任意階の微分積分の演算子に対して次の記号が使われる．

$${}_aD_t^\alpha f(t)$$

先ず正の整数階の微分の一般化をすることから始める．

連続関数 $y=f(t)$ の 1 階微分はよく知られている定義に従えば，

$$f'(t)=\frac{df(t)}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} \tag{1}$$

この定義に従ってもう一度微分をすれば，2 回の導関数が得られる．