

振動における抵抗要素

Part1) 振動における減衰項の理論的な基礎

1 初めに

振動における抵抗要素についての解説ということで話を進めていきたい。前回も同じような解説記事を書いたのだが、もう少しわかりやすい記述をということで前回の記事に補足を行うこととした。ここでいう抵抗要素とはおもに物質そのものの内部での損失によるものを議論することにする。一般的に弾性体の教科書や流体力学の教科書は多く存在するが、粘弾性や塑性変形等を扱い理論的に解説を行った本はかなり少ない。最近手にした本では Christensen の "Theory of Viscoelasticity" にかなり詳しい説明が記述されていたので、その本を参考に粘弾性の基礎的なメカニズムの理論的な考察を紹介したい。また系の対称性から求められる独立した弾性係数の数についての求め方についても紹介を行う。ここでいう系の対称性とは、例えば水や空気のような媒質では上下左右等に対して対称であるが、木のように木目の繊維がある場合は縦と横で硬さが違うなどのことで、この場合はある軸に対し回転対象性が無いこととなる。すると曲げる方向で硬さが違うなどの性質がでてくる。今回は具体的な問題を解くというより連続体力学の基本的な考え方や粘弾性による減衰の数学的な表現等の説明を行いたい。

なお次回は減衰項の影響を考慮した梁要素と板要素の振動数値解析方法とその結果について説明を行う予定である。

2. 応力、変位テンソル

固体の振動を考慮するために、微小変位の仮定のもとに理論的な考察を進めることにする。固体は分子や原子によって構成されていることは知られている。従って本来はそれらの間の相互作用を考慮することにより力学的な性質を予測できるはずであるが、それはあまり有効な手段ではない。それよりは固体を連続体と考え局所的な変形に対する応答を考えることのほうが実用的である。そこで変形されていない固体に固定された座標を X_i とおきその点が移動した時の座標を $x_i = x_i(X_i, t)$ とする。なおこの添字 $i = 1, 2, 3$ はそれぞれ x, y, z を示すこととする。変位の各成分は $u_i = x_i(t) - X_i$ で表現されることになる。この変位を空間微分することによって得られる量から歪テンソルは

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1)$$

で表現される。テンソル等は座標変換に対してどのような変換法則をみたすかで定義されるものだが、ここではたくさんの添字がありその添字に対して操作をすることにより新しいテンソル量やベクトル量を得られるものだと理解していても十分であろう。なぜこのように2個の添え字が必要かという、単純な伸びなどは変位の方向と、その変位量が変化する方向は一致するのだが、せん断変形の場合は、変位の方向とその変位変化する方向が一致しない。したがって2つの方向に依存する量となるからである。さてテンソル量に対する操作とは添字の入れ替え、具体的には e_{12} を e'_{21} に入れ替えることや添字を動かしながら積和演算を行う(縮約する)

$$\sum_{j,k} e_{jk} f_{jklm} \quad (2)$$

ことである。なお同じ記号の添字が続く場合は一般的にテンソルの縮約を行うことを表現する。(例)

$$\sum_{j,k} e_{jk} f_{jklm} = e_{jk} f_{jklm} \quad (3)$$